

麻省理工学院 2002 年春季课程 8.02 期末考试解答

问题一

(a) $+Q$ 所受的任意一个 $+q$ 的力都会被与它关于原点对称的另一个 $+q$ 所给的力抵消, 所以 $+Q$ 所受合外力为零。

(b) 如果将位于 3:00 处的电荷移开, 则位于 9:00 处的电荷处于非平衡态, 这样 $+Q$ 就会

受到一个向右的大小为 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}(qQ/R^2)$ 的力。(如果我们把一个 $-q$ 的电荷放到 3:00 处

而不是把该点的 $+q$ 移开, 这样也会得到同样的效果。)

问题二

利用熟悉的安培环路定理可得:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{piercing surface}} \implies B = \frac{\mu_0 I_{\text{p.s.}}}{2\pi r}.$$

由于没有定义电流方向。我们假设内部半径为 a 的柱体的电流流向纸内部, 而外部半径为 $3a$ 的柱体的电流流向纸的外部。取电流流向纸外部为正向, 则对应的逆时针方向的磁场 B 为正向 (由右手定则判定), 顺时针方向的磁场 B 为负。

区域(1): $I_{\text{p.s.}} = 0 \implies B = 0$

区域(2): $I_{\text{p.s.}} = -I \implies B = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

区域(3): $I_{\text{p.s.}} = 3I - I = 2I \implies B = \frac{\mu_0 I}{\pi r}$

(个人的电流符号的选择可能与此不同)

问题三

如果没有电流通过电流计 A, 则一个电流 (称为 I_1) 通过 R_3 和 R_x , 另一个电流 (称为 I_2) 通过 R_1 和 R_2 。对于这四个电阻构成的简单回路应用霍尔基夫回路规则可得 $I_1(R_3 + R_x) = I_2(R_1 + R_2)$ 。再看另一个由 R_3 , R_1 和 A 构成的回路, 可得 $I_1 R_3 = I_2 R_1$ 。用第一个方程式除以第二个方程式可消去 I_1 和 I_2 , 这样就可解出 $R_x = R_3 R_2 / R_1$ 。

问题四

(这个问题可以有很多解法)

由对称性, 这些电场的方向一定是指向薄板和厚板。令 E 向上为正, 向下为负。由线性叠加原理, 任何一点的电场都是薄板电场和厚板电场的总合。

首先考虑薄板, 应用高斯定理对“高斯柱体”(包括一小部分空间和两个到薄板距离相等的底面) 进行分析, 可求出薄板面以上部分 $E_{\text{sheet}} = -\sigma / 2\epsilon_0$ 和薄板面以下部分 $E_{\text{sheet}} = \sigma / 2\epsilon_0$ 。

与到薄板的确切距离无关。

接着考虑厚板, 应用高斯定理。高斯面取一个“高斯柱体”(含一个在厚板面以上的底面和厚板面以下的底面, 两个底面到厚板距离相等), 可求出厚板面以上的电场 $E_{\text{slab}} = +\rho D / 2\epsilon_0$

和厚板底面以下电场 $E_{\text{slab}} = -\rho D / 2\epsilon_0$ 。它们与到厚板的确切距离无关。在厚板内部, 由于电

荷密度恒定，电场 E_{slab} 是厚板上和厚板下的电场与板的厚度线性比例的结果。

(a) 在薄板面以上 h 处，当然也在厚板面以上，总的电场为：

$$E = E_{sheet} + E_{slab} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\rho D}{2\epsilon_0} = \frac{(\rho D - \sigma)}{2\epsilon_0} .$$

(b) 在厚板上表面以下 d 处 ($d < D$)，当然也在薄板以下，

$$E_{slab} = \rho(D - 2d)/2\epsilon_0$$

该表达式与 d 成线性比例关系，且当 $d=0$ 时，它的值是 $+\rho D/2\epsilon_0$ ，当 $d=D$ 时，它的值是 $-\rho D/2\epsilon_0$ 。因此：

$$E = E_{sheet} + E_{slab} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\rho(D - 2d)}{2\epsilon_0} = \frac{[\sigma + \rho(D - 2d)]}{2\epsilon_0}$$

(c) 厚板下底面以下 H 处，在厚板外部并且在薄板之下，所以电场为：

$$E = E_{sheet} + E_{slab} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\rho D}{2\epsilon_0} = \frac{(\sigma - \rho D)}{2\epsilon_0} .$$

问题五

- (a) 很长一段时间后，与电阻和自感线圈已经无关。每个电容器两端的电压都是 V ，则每个电容器极板间的电场 $E=V/d$ （方向指向下，因为上面的极板带正电荷）。
- (b) 由于电源没有断开，电容器两端的电压依然是 V ，所以我们可知极板间的电场 $E=V/d$ （放向指向下）。
- (c) 若插入电介质之前将电源断开，则每个电容器带电量 $Q=CV$ 。两个并联的电容器总带电量为 $2CV$ 。插入电介质之后，电荷将在左边电容器和右边电容器之间流通以形成新的平衡：他们两端相等的新的电压 V' 。两电容器的总带电量是恒定的，右边的电容器没有变化，所以它的新的电量为 $Q_R=CV'$ 。左边的电容器增加了一个系数 k ，所以它的新的电量为 $Q_L=kCV'$ 。由电荷总量守恒可得：

$$Q_R + Q_L = (1 + \kappa)CV' = 2CV \Rightarrow V' = \frac{2V}{(1 + \kappa)} .$$

则每个电容器极板间的电场是

$$E = V'/d = \frac{2V}{(1 + \kappa)d} = 2V/3d$$

方向指向下

问题六

- (a) 若在 $t=0$ 时刻线圈位于 x - y 平面内，则以后线圈和 x - y 平面的夹角是 $2\pi ft$ 。通过线圈所围范围内的磁通量

$$\Phi_B = nSB \cos(2\pi ft),$$

$$\text{感生电动势 } \mathcal{E} = -d\Phi_B/dt = 2\pi fnSB \sin(2\pi ft),$$

$$\text{感生电流 } I = \mathcal{E}/R = (2\pi fnSB/R) \sin(2\pi ft),$$

$$\text{感生电流最大值 } I_{\max} = 2\pi fnSB/R,$$

代入给定的 B 的值可得

$$I_{\max} = \pi fnS/R \text{ A}.$$

当线圈与 x - y 平面的夹角为直角时，电流有最大值。

(b) 为了保持转动，平均功率一定等于电阻上消耗的平均功率 $\bar{P}$ ：

$$\bar{P} = \bar{I}^2 R = I_{\max}^2 R \overline{\sin^2(2\pi ft)} = \frac{1}{2} I_{\max}^2 R = \frac{(\pi fnS)^2}{2R} \text{ W}.$$

问题七

(a) 表达式是 $(ky + \omega t)$ 的形式，所以传播方向是 $-\hat{y}$ 方向。

(b) 由于 $\vec{E}_0 \times \vec{B}_0$ 方向是 $-\hat{y}$ 向，而给出的 $\vec{E}_0$ 是 $+\hat{z}$ 方向，所以 $\vec{B}_0$ 一定是 $-\hat{x}$ 方向。介质中的波速是

$$|\vec{E}_0|/|\vec{B}_0| = v = c/n$$

$$\text{所以, } |\vec{B}_0| = \frac{n|\vec{E}_0|}{c} = \frac{(1.5)(2)}{3 \times 10^8} = 10^{-8} \Rightarrow \vec{B}_0 = -10^{-8} \hat{x}$$

(c)

$$v = \frac{c}{n} = \lambda f = \frac{\lambda \omega}{2\pi} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi c}{n\omega} = \frac{2\pi(3 \times 10^8)}{(1.5)(4\pi \times 10^{15})} = 10^{-7} \text{ m}$$

问题八

(a)

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = V_0$$

(b) 由给出的 $Q(t) = CV_0(1 - e^{-t/\tau})$,

可得,

如果 $\tau = RC$,

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = V_0(1 - e^{-t/\tau}) + (RCV_0/\tau)e^{-t/\tau} = V_0$$

(c) 电阻中的电流是

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = (CV_0/\tau)e^{-t/\tau} = (V_0/R)e^{-t/\tau}$$

(d)

$$U_C(t_1) = \frac{1}{2}Q(t_1)V_C(t_1) = \frac{Q^2(t_1)}{2C} = \frac{1}{2}CV_0^2(1 - e^{-t_1/\tau})^2$$

(e) 电阻上消耗的功率 (以时间为变量) 是 :

$$P(t) = I^2(t)R = (V_0^2/R)e^{-2t/\tau}$$

$t=0$ 到 $t=t_1$ 时间段内电阻产生的热量

$$W = \int_0^{t_1} P(t) dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^{t_1} e^{-2t/\tau} dt = \frac{-\tau V_0^2}{2R} e^{-2t/\tau} \Big|_0^{t_1} = \frac{1}{2}CV_0^2(1 - e^{-2t_1/\tau})$$

问题九

(a) 电子所受电场力 qE 向上 (电子带负电), 大小为 $F_E = (1.6 \times 10^{-19})(10^5) = 1.6 \times 10^{-14} \text{N}$ 。

所受磁场力 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 方向向下, 大小为 $F_B = (1.6 \times 10^{-19})(3 \times 10^6)(0.1) = 4.8 \times 10^{-14} \text{N}$ 。 $F_B > F_E$,

因此电子所受合外力方向向下, 大小为 $F = F_B - F_E = 3.2 \times 10^{-14} \text{N}$ 。

(b) 如果我们调整电场和磁场大小使之满足 $E = vB$ (v 是电子速率), 则电子所受电场力和磁场力将会相等, 又因为这两个力方向相反, 所以它们会相互抵消。这样, 电子将沿直线穿过电容器 (另外, 也可将 E 增大至 $3 \times 10^5 \text{V/m}$, 保持 B 不变, 则电场力和磁场力方向相反, 大小都是 $4.8 \times 10^{-14} \text{N}$)。

问题十

(a) 坡印亭通量: $S = 10^3 \text{W/m}^2$ 。面积: $A = 10^{-4} \text{m}^2$ 。时间间隔: $\Delta t = 30 \text{s}$ 。

吸收的能量 $= SA \Delta t = (10^3)(10^{-4})(30) = 3 \text{J}$ 。

(b) 如果完全吸收辐射压强: $P = S/c$, 则该平面所受的力:

$$F = PA = SA/c = \frac{(10^3)(10^{-4})}{(3 \times 10^8)} \simeq 3.3 \times 10^{-10} \text{N}$$

问题十一

(a) 在 $\omega = 0$ 的稳态下, 所有电流都是恒定的 (与时间无关)。自感线圈可看成零电阻的导线。电容器是断路的, 电流 $I_C = 0$, (即使用一个电阻代替该处的电容也没有电流通过)。这样, 实际上只有一个电阻 R 与零电阻的导线串联在电路中 $I_L = I_R = V_0/R$ (虽然电容器电阻与解题无关, 但应注意电容器电阻 $1/\omega C$ 是无穷大的)。

(b) 如果 ω 无穷大, 则自感线圈的电阻 (ωL) 无穷大。这样 $I_L = 0$ 。电容的电阻 $1/\omega C$ 变

为零。因此，电路只是一个电阻 R 和一个零电阻的电容器串联，电流峰值就是 $I_C = I_R = V_0/R$ 。

- (c) 我们认为当 ω 的值变为非零时，电流值由(a)中的值 V_0/R 将至峰值 I_R 。 $\omega = 0$ 时，并联的电容和自感线圈有效阻抗为零。当 $\omega \neq 0$ 时，它只能增加，因为这时自感线圈不能再看成零电阻的导线，电容器的电阻 $1/\omega C$ 也不再是零（如果你有兴趣和精力，这个值可以通过精确计算得出）。

- (d) 频率是 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ （它还能是什么值？）。这是 LC 电路的固有振荡频率。 LC 电路中有振荡电流但并不消耗能量。电容器两端的电压始终是电源电压，所以，电阻两端一直没有压降，恒有 $I_R = 0$ （所有的这些内容都是非常直观的）。

问题十二（参见作业5的第七题考试2的第四题）

假设突变为零，则沿如图所示路径积分 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$ ，因为两极板间有电场存在。由于

这是稳态情况，所以对于开放回路，磁通量的变化率 $d\Phi_B/dt = 0$ 。因此由法拉第定律可知

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ ，彼此矛盾。因此电容板边缘电场不可能突变为零。

问题十三

- (a) V_{right} 的示数是 $-0.1V$ 。因为它与左边的电压计 V_{left} 由相同的内阻，但由电路中电流的连续性知道它与左边电压计有相反方向的电流。
- (b) 如果左边电压计 V_{left} 示数是 $+0.1V$ ，则电流由它的“+”极流入，因此电流在回路中是逆时针流向。由欧姆定律可得：

$$I = V_{left}/R_{left} = (0.1)/(10^4) = 10^{-5} \text{ A}$$

感生电动势也是逆时针方向，大小为：

$$\mathcal{E} = I(R + R_{left} + R_{right}) = (10^{-5})(2.5 \times 10^4) = 0.25 \text{ V}$$

问题十四

- (a) T. 光在空气中传播（空气折射率 ≈ 1 ）时，布儒斯特（偏振）角由 $\tan \theta_p = n$ 给出。其中

n 是玻璃折射率。 N 是关于波长的函数。因此很明显红光和蓝光的 θ_p 不同。

- (b) F. 从星体射向我们的光的多普勒效应是蓝移的。#35, Giancoli 37-12.
- (c) T. 蓝色位于彩虹的最外边，由于雨滴内部的双重折射它的光是强烈偏振的。
- (d) F. 从水坑反射来的光是部分偏振的，为了阻挡它们眼镜的偏振方向应是垂直的。
- (e) T. 一个奇特的发电机（就像#23课堂讨论的）和普通的发电机原理是相同的。
- (f) T. 两个圆环中相同的电流会产生相同的磁场。因此有相同的磁通量。自感就是磁通量与电流的比值。所以即使两圆环的材料不同，它们的自感也还是相同的。
- (g) T. 考虑空气中两行平板电容器：一个较小的电容器的极板的面积是 A ，极板间距离是

d 。较大的电容器的极板面积是 $2A$ ，极板间距离是 $2d$ 。它们有相同的电容 $C = \epsilon_0 A/d$ 。

但是，如果两者通过带电而有了相同的电势差 V ，较小的电容器极板间的电场 $E_1 = V/d$ 。而较大的电容器极板间的电场 $E_2 = V/2d$ 。因此在达到空气击穿电场临界值 E 之前，较

- 大的电容器由于电势差较大可以带两倍的电量。所以可以储存更多的能量 ($CV^2/2$)。如果量电容器的介电常数 k 相同,也会有相同的道理。因此很明显,有效尺度大的电容器相对尺度较小的电容来说,可以通过带电而获得较大的电势差。在#8 课堂上,我仔细讨论过相关内容。我拿两个电容起来做比较:它们电容都是 $100\ \mu\text{F}$, 一个体积是 10^4cm^3 , 另一个体积只有 1cm^3 。前者可以得到 4000V 的电压,而后者只有 40V 。
- (h) F. 光谱不是因为塑料的折射(折射率是波长的函数)而产生的,而是由于塑料板上平行光线的间隙起了平行狭缝作用而产生了干涉。
- (i) T. **HST (高速实验机) 不是受空气模糊的影响而限制了地面大型望远镜观测角度。** 它的极限角度 $\theta = (1.22)\lambda / D$ (D =光圈孔径) 随光的波长变短而改善(变小)。#34, 也可参看问题 11.6。
- (j) T. 即使独立的量子级粒子(如质子)也会有干涉现象。
- (k) T. #31。
- (l) T. 声音在空气中的传播速度与温度有关。乐声是由它们的频率 $f = v / \lambda$ 来定义的。因此如果波长确定而声音在空气中的速度 v 变化频率就会改变。(例如, λ 恒定, 低音调的波长是通量的 2 倍) #26。
- (m) T. 冰晶体可以起棱镜的作用。
- (n) F. 一个粒子所受的任何非平衡力都会使之产生加速度 ($F=ma$)。如果力与粒子速度垂直(如磁场力)则加速度使运动方向发生改变。
- (o) F. 感生电动势不是磁通量本身确定的而是磁通量关于时间的微分。瞬时磁通量 Φ_B 为零时 $d\Phi_B / dt$ 可能不为零。